

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
MOEZ SRIOUI

UTILISATION DES COPULES POUR BORNER EXPLICITEMENT LA  
VALEUR-À-RISQUE D'UN PORTEFEUILLE

DÉCEMBRE 2005

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais exprimer mes remerciements les plus sincères à mes directeurs de recherche, MM. Mhamed Mesfioui et Jean-François Quessy, professeurs au Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières. En effet, ils ont accepté de diriger ce travail et m'ont encouragé et soutenu durant cette période. Leur patience, ainsi que leur grande disponibilité, ont assuré la réussite de ce projet.

Je tiens également à remercier mes très chers parents, Hassine et Arbia, mon frère Mohamed, ma grand-mère Aziza et tous les membres de ma famille pour leur soutien financier et moral. Je remercie aussi ma femme Stéphanie, mes amis, et plus particulièrement Tariq Saali et Abdelkader Siddour.

Une partie de ce travail a été financée par des octrois individuels accordés à M. Mhamed Mesfioui par le *Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada*, et à M. Jean-François Quessy par le *Fonds Institutionnel de Recherche de l'Université du Québec à Trois-Rivières*.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	
<b>Liste des tableaux</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Chapitre 1. Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 2. Mesure du niveau de risque en finance</b>	<b>4</b>
2.1 Notions de base en gestion de risque . . . . .	4
2.2 La Valeur-à-Risque . . . . .	5
2.3 Exemples de calculs de la Valeur-à-Risque . . . . .	8
<b>Chapitre 3. Analyse multivariée et théorie des copules</b>	<b>15</b>
3.1 Lois de probabilité multivariées . . . . .	16
3.2 Lois conditionnelles . . . . .	17
3.3 Moments conditionnels . . . . .	18
3.4 Corrélation et indépendance . . . . .	19
3.5 Loi normale multivariée . . . . .	20
3.6 Les copules . . . . .	22
3.7 Propriété d’invariance d’une copule . . . . .	25
3.8 Bornes de Fréchet–Hoeffding . . . . .	26

3.9	Copules archimédiennes . . . . .	27
<b>Chapitre 4. Bornes lorsque les marges sont connues</b>		<b>30</b>
4.1	Introduction . . . . .	30
4.2	Bornes sur la Valeur-à-Risque de S . . . . .	32
4.3	Bornes explicites sur la Valeur-à-Risque de S . . . . .	34
4.3.1	Borne inférieure . . . . .	35
4.3.2	Borne supérieure . . . . .	36
<b>Chapitre 5. Bornes lorsque les moyennes et les variances sont connues</b>		<b>45</b>
5.1	Construction des bornes . . . . .	45
5.2	Illustrations . . . . .	47
<b>Conclusion</b>		<b>52</b>

# LISTE DES FIGURES

2.1	Valeur-à-Risque, en fonction de $\alpha$ , d'une variable de loi exponentielle avec $\lambda = 1, 2, 3$ . . . . .	10
2.2	Valeur-à-Risque, en fonction de $\alpha$ , d'une variable de loi Pareto avec $\gamma = 1$ et $\beta = 3, 4, 5$ . . . . .	13
2.3	Valeur-à-Risque, en fonction de $\alpha$ , d'une variable de loi logistique avec $\nu = 0$ et $\xi = 1, 2, 3$ . . . . .	14
4.1	Borne sur la VaR de $X_1 + X_2$ en fonction du paramètre de dépendance d'une copule de Clayton, où $X_i \sim \exp(1)$ . . . . .	42
4.2	Borne sur la VaR de $X_1 + X_2$ en fonction du paramètre de dépendance d'une copule de Frank, où $X_i \sim \exp(1)$ . . . . .	43
4.3	Borne sur la VaR de $X_1 + X_2$ en fonction du paramètre de dépendance d'une copule de Gumbel, où $X_i \sim \exp(1)$ . . . . .	44
5.1	Bornes de la Valeur-à-Risque d'une variable aléatoire de moyenne $\mu_X = 5$ et de variance $\sigma_X^2 = 1$ . . . . .	48
5.2	Influence de $\mu = \mu_1 + \mu_2$ sur la borne inférieure de la Valeur-à-Risque de $S = X_1 + X_2$ pour $\sigma = 1$ et $\mu = 1, 2, 3$ . . . . .	49
5.3	Influence de $\mu = \mu_1 + \mu_2$ sur la borne supérieure de la Valeur-à-Risque de $S = X_1 + X_2$ pour $\sigma = 1$ et $\mu = 1, 2, 3$ . . . . .	49
5.4	Influence de $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ sur la borne inférieure de la Valeur-à-Risque de $S = X_1 + X_2$ pour $\mu = 5$ et $\sigma = 1, 2, 3$ . . . . .	50
5.5	Influence de $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ sur la borne supérieure de la Valeur-à-Risque de $S = X_1 + X_2$ pour $\mu = 5$ et $\sigma = 1, 2, 3$ . . . . .	51

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Le monde dans lequel on vit est instable. Par exemple, l'incertitude causée par les phénomènes naturels peut à elle seule constituer un élément important de déstabilisation des groupes sociaux. Également, le fonctionnement du monde économique et financier peut engendrer lui aussi de fortes perturbations pour l'activité humaine. L'annonce de statistiques provisoires puis définitives cause sans cesse des remous qui peuvent avoir des conséquences considérables sur notre vie quotidienne.

Des outils permettant de limiter l'exposition à des changements brutaux sont apparus, notamment en finance, où plusieurs approches furent développées. En particulier, les marchés à terme et d'options ont connu un développement spectaculaire en lien avec l'émergence de techniques quantitatives qui donnent une base rationnelle aux procédés d'évaluation.

Au milieu du siècle dernier, la théorie de la gestion des portefeuilles a connu un véritable essor avec l'avancée de la célèbre théorie de Markowitz (1952) relative à la diversification des portefeuilles. Pour plus de détails, consulter aussi la monographie de Markowitz (1970). Dans cette approche, l'écart-type

est la mesure centrale du risque d'un portefeuille. Cependant, même pour un seul actif, cette mesure est inadéquate car elle ne tient pas compte du risque représenté par la covariance de son rendement avec celui des autres titres qui constituent un portefeuille diversifié.

Les théories du risque qui ont suivi celles de Markowitz se sont attardées aux facteurs qui déterminent le risque d'un titre, ainsi qu'à l'équilibre du marché financier. Durant les années soixante, Sharp (1963) a proposé un modèle d'évaluation des actifs financiers, soit le *Capital asset pricing model*. Au milieu des années soixante-dix est apparu un autre modèle de gestion de risque basé sur l'absence d'arbitrage, à savoir l'*Arbitrage Pricing Theory*.

Le rôle de plus en plus important que joue le risque dans le contexte économique d'aujourd'hui a contribué au développement et à l'élaboration de nouveaux outils et méthodes de gestion du risque, notamment la Valeur-à-Risque, ou VaR, qui s'inscrit dans le cadre de ces approches et qui constitue le coeur de ce mémoire de recherche. Cette mesure du risque est aujourd'hui utilisée par toutes les grandes banques pour évaluer le risque d'un marché. On peut retracer l'émergence de la Valeur-à-Risque comme outil de gestion du risque à l'année mille neuf cent quatre-vingt-treize, où un groupe influent constitué de représentants de l'industrie financière a conseillé son utilisation. Cette recommandation a été largement adoptée depuis, la VaR étant devenue en quelques années l'outil reconnu pour évaluer les risques financiers.

Dans ce mémoire, la Valeur-à-Risque sera étudiée dans le contexte général d'un portefeuille constitué de plusieurs risques. Dans ce cas, le manque d'information sur la structure de dépendance qui lie les risques entre eux rend



difficile le calcul de la VaR. Pour tenir compte de cette dépendance, une approche basée sur le concept moderne de copule sera exploitée. Cette méthode permettra de calculer des bornes à l'intérieur desquelles la VaR associée à un portefeuille d'actifs se situe. Deux situations rencontrées fréquemment en pratique seront considérées dans le détail: le cas de distributions marginales connues et le cas où seules les moyennes et les variances sont disponibles.

Au Chapitre 2, la définition formelle de la Valeur-à-Risque sera donnée, et quelques propriétés simples qui en découlent seront étudiées. Des calculs de VaR seront ensuite détaillés pour plusieurs lois statistiques dont l'usage est fréquent en finance. Dans le Chapitre 3, quelques résultats importants sur la théorie des copules seront énoncés, ce qui permettra de modéliser la structure de dépendance de plusieurs actifs. Aux Chapitres 4 et 5, des bornes pour la VaR d'un portefeuille de plusieurs risques seront calculées explicitement, ce qui étendra les calculs effectués par Mesfioui & Quessy (2005). Au Chapitre 4, la notion de copule explorée au chapitre précédent sera exploitée dans le cas où les distributions marginales sont connues, alors que le Chapitre 5 contiendra une brève étude de bornes obtenues lorsque seules les moyennes et les variances des actifs sont connues, utilisant une approche basée sur le coefficient de corrélation classique.

## CHAPITRE 2

# MESURE DU NIVEAU DE RISQUE EN FINANCE

### 2.1 Notions de base en gestion de risque

Suite à plusieurs catastrophes financières survenues récemment, les investisseurs considèrent maintenant la gestion de risque comme l'une des principales responsabilités d'un gestionnaire d'entreprise. C'est pourquoi actuellement, une attention particulière est portée sur la modélisation des fluctuations du marché sous un angle statistique.

Une situation classique en gestion de risque consiste à considérer un ensemble de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , où  $X_i$  peut représenter par exemple un actif, une valeur mobilière, le rendement d'un placement détenu par un particulier ou une institution, ou encore une obligation d'un gouvernement ou d'une société. On dit alors du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  qu'il est un *portefeuille*.

Une autre notion fondamentale pour un gestionnaire est la *volatilité*, c'est-à-dire la variabilité potentielle d'un risque. En effet, beaucoup de gestionnaires

financiers supposent que celle-ci mesure convenablement le niveau de risque d'un actif. En termes statistiques, la volatilité n'est rien d'autre que l'écart-type d'un actif, c'est-à-dire une mesure de sa fluctuation autour de sa valeur moyenne. Donc, plus la valeur d'un actif a tendance à varier au cours du temps, à la hausse ou à la baisse, plus celle-ci est volatile. Pour un gestionnaire, une grande volatilité implique donc des possibilités de profits plus grandes, mais également un risque de perte plus important.

Nous verrons à la section suivante que la Valeur-à-Risque est au centre de nombreux systèmes de gestion de risque. Cet indice permet, entre autres, de mesurer le risque associé à un portefeuille. Par exemple, si on s'intéresse aux pertes financières éventuelles associées à  $n$  actifs d'une certaine banque, alors la Valeur-à-Risque va estimer, à un degré de confiance pré-établi, la perte maximale à subir.

## 2.2 La Valeur-à-Risque

La Valeur-à-Risque (VaR) a été introduite par différents auteurs pour estimer, à un niveau de confiance pré-établi, la perte éventuelle associée à un actif sur un horizon de temps donné. Pour plus de détails, voir par exemple Longley-Cook (1998) ou Butler (1999).

Tel que noté par Calvet (2000) et Duffie & Jun (1997), la VaR d'un portefeuille de plusieurs actifs financiers correspond au montant des pertes maximales encaissées sur un horizon de temps donné, si l'on exclut un ensemble

d'événements défavorables ayant une faible probabilité de se produire. On peut aussi définir la VaR comme la mesure qui fournit une estimation de la perte potentielle d'un portefeuille sous l'hypothèse que sa composition demeure inchangée sur une certaine période de temps.

Plus formellement, Alexander (2001) définit la VaR d'un risque comme un percentile de la distribution statistique des pertes et des gains qui peuvent survenir. En ces termes, la VaR est intimement liée à la fonction de répartition d'un actif, c'est-à-dire à sa loi de probabilité. Soit donc  $X$ , une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par  $F(x) = P(X \leq x)$ . Pour définir la VaR, il faut d'abord introduire la notion d'inverse généralisé d'une fonction.

**Définition 2.1.** *L'inverse généralisé d'une fonction  $g$  est défini par*

$$g^{-1}(v) = \min \{u \in \mathbb{R}; g(u) \geq v\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la Valeur-à-Risque d'une variable aléatoire.

**Définition 2.2.** *Soit  $X$ , une variable aléatoire dont la fonction de répartition est  $F$ . La Valeur-à-Risque de  $X$  au niveau  $\alpha$  est définie par*

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha).$$

La définition précédente signifie qu'avec une certitude de  $(100 \times \alpha)\%$ , le montant du risque ne devrait pas excéder  $\text{VaR}_\alpha(X)$ . Autrement dit,

$$P\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} = \alpha \quad \text{et} \quad P\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\} = 1 - \alpha.$$

**Proposition 2.1.** *Les propriétés suivantes sur la VaR d'une variable aléatoire  $X$  sont vraies.*

$$(i) \text{ VaR}_\alpha(X + c) = \text{VaR}_\alpha(X) + c$$

$$(ii) \text{ VaR}_\alpha(cX) = \begin{cases} c\text{VaR}_\alpha(X), & \text{si } c \geq 0 \\ c\text{VaR}_{1-\alpha}(X), & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

**Démonstration.** (i) Par définition, on a

$$\mathbb{P}\{X + c \leq \text{VaR}_\alpha(X + c)\} = \alpha,$$

ou, de façon équivalente,

$$\mathbb{P}\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X + c) - c\} = \alpha.$$

On en déduit

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X + c) - c,$$

ce qui complète la démonstration de (i).

(ii) Par définition, on a  $\mathbb{P}\{cX \leq \text{VaR}_\alpha(cX)\} = \alpha$ . Si  $c > 0$ , alors on tire

$$\mathbb{P}\left\{X \leq \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c}\right\} = \alpha,$$

ce qui implique que

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c}.$$

On aura donc

$$c\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(cX).$$

Si  $c \leq 0$ , on a

$$\mathbb{P}\left\{X \geq \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c}\right\} = \alpha,$$

ou de façon équivalente,

$$\mathbb{P} \left\{ X < \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c} \right\} = 1 - \alpha.$$

Il s'ensuit que

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c},$$

et ainsi

$$\text{VaR}_\alpha(cX) = c\text{VaR}_{1-\alpha}(X).$$

La démonstration de (ii) est alors complète.  $\diamond$

## 2.3 Exemples de calculs de la Valeur-à-Risque

Dans cette section, quelques calculs de Valeur-à-Risque seront effectués pour quelques-unes des densités de probabilité les plus connues. Des graphiques seront également fournis pour illustrer l'influence des paramètres de ces lois sur le comportement de  $\text{VaR}_\alpha(X)$ .

**Exemple 2.1.** Soit  $X$ , une variable aléatoire normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . On a alors

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P} \left( Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \right) = \Phi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $Z$  de loi normale de moyenne 0 et de variance 1. On dit alors que  $Z$  est une variable normale centrée et réduite. Il s'ensuit que

$$\text{VaR}_{\alpha,\mu,\sigma}(X) = F_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha) = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu. \quad (2.1)$$

À noter que comme  $\Phi^{-1}(\alpha)$  est la Valeur-à-Risque au niveau  $\alpha$  de  $Z$ , on a

$$\text{VaR}_{\alpha,\mu,\sigma}(X) = \sigma \text{VaR}_{\alpha}(Z) + \mu.$$

**Exemple 2.2.** Soient deux actifs  $X_1$  et  $X_2$  tels que le vecteur  $(X_1, X_2)$  est distribué selon une loi normale bivariée de moyenne  $(\mu_1, \mu_2)$ , de variance  $(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$  et de coefficient de corrélation  $\rho$ . On désire calculer la VaR de la somme pondérée  $S = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2$ , où  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ . On calcule

$$\mu_S = E(S) = E(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2) = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2$$

et

$$\sigma_S^2 = \text{var}(S) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho.$$

Comme  $S$  est distribuée selon une loi normale univariée de moyenne  $\mu_S$  et de variance  $\sigma_S^2$ , il s'ensuit de l'équation (2.1) que

$$\text{VaR}_{\alpha}(S) = \sigma_S \Phi^{-1}(\alpha) + \mu_S.$$

Si on suppose l'indépendance entre  $X_1$  et  $X_2$ , c'est-à-dire que  $\rho = 0$ , et qu'on suppose en plus que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , on a

$$\text{VaR}_{\alpha}(S) = \sqrt{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2} \Phi^{-1}(\alpha).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \{\text{VaR}_{\alpha}(S)\}^2 &= \omega_1^2 \{\sigma_1 \Phi^{-1}(\alpha)\}^2 + \omega_2^2 \{\sigma_2 \Phi^{-1}(\alpha)\}^2 \\ &= \omega_1^2 \{\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_1}(X_1)\}^2 + \omega_2^2 \{\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_2}(X_2)\}^2. \end{aligned}$$

En pratique, il est cependant hasardeux de supposer l'indépendance entre des risques.

**Exemple 2.3.** Soit  $X$ , une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre  $\lambda$ , c'est-à-dire que la densité de  $X$  est

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0, \lambda > 0.$$

Pour cette distribution, la moyenne et la variance sont données par  $E(X) = \lambda$  et  $\text{var}(X) = \lambda^2$  et la fonction de répartition associée à  $f_\lambda$  s'écrit sous la forme

$$F_\lambda(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-s/\lambda} ds = 1 - e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0.$$

On aura donc

$$\text{VaR}_{\alpha,\lambda}(X) = F_\lambda^{-1}(\alpha) = -\lambda \log(1 - \alpha). \quad (2.2)$$

Le graphique suivant trace  $\text{VaR}_{\alpha,\lambda}(X)$  en fonction de  $\alpha$  pour  $\lambda = 1, 2, 3$ .

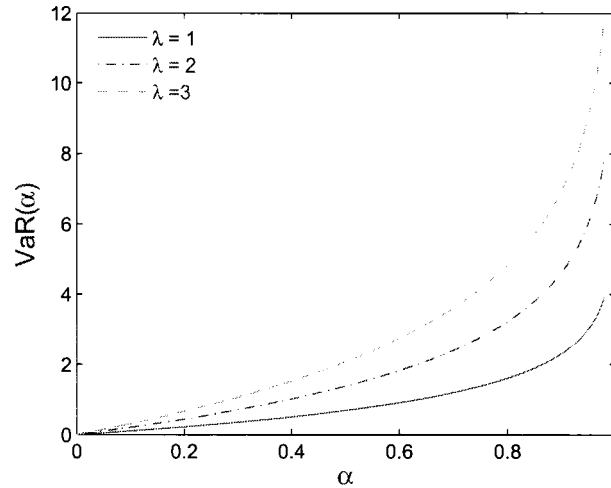


Figure 2.1: Valeur-à-Risque, en fonction de  $\alpha$ , d'une variable de loi exponentielle avec  $\lambda = 1, 2, 3$

Le graphe précédent montre que pour une variable exponentielle, la Valeur-à-Risque est une fonction croissante de la volatilité. En effet, pour ce modèle on a  $\sqrt{\text{var}(X)} = \lambda$ , ce qui signifie que la perte potentielle augmente avec  $\lambda$ .



**Exemple 2.4.** Soit  $X$ , une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[c, d]$ , où  $c < d$ . La densité de probabilité de  $X$  est donc

$$f_{c,d}(x) = \frac{1}{d-c} \mathbf{1}_{[c,d]}(x),$$

où  $\mathbf{1}$  est la fonction indicatrice d'un ensemble, c'est-à-dire que pour un ensemble quelconque  $A$ ,

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition associée à  $f_{c,d}$  s'écrit

$$F_{c,d}(x) = \int_c^x \frac{1}{d-c} \mathbf{1}_{[c,d]}(s) ds = \begin{cases} 0, & x < c \\ \frac{x-c}{d-c}, & x \in [c, d] \\ 1, & x > d, \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\text{VaR}_{\alpha,c,d}(X) = F_{c,d}^{-1}(\alpha) = (d-c) \alpha + c. \quad (2.3)$$

En particulier, quand  $X$  est uniforme sur  $[0, 1]$ , on a  $\text{VaR}_{\alpha,0,1}(X) = \alpha$ .

Pour cette loi, la variance et l'écart-type sont donnés par

$$\text{var}(X) = \frac{(d-c)^2}{12} \quad \text{et} \quad \sqrt{\text{var}(X)} = \frac{d-c}{\sqrt{12}}.$$

On peut alors écrire l'équation (2.3) sous la forme

$$\text{VaR}_{\alpha,c,d}(X) = \sqrt{12 \text{ var}(X)} \alpha + c. \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) permet de constater que la Valeur-à-Risque d'une variable uniforme augmente avec sa volatilité.

**Exemple 2.5.** Soit  $X$ , une variable aléatoire de distribution Pareto de paramètres  $\gamma > 0$  et  $\beta > 2$ . La densité de  $X$  est

$$f_{\gamma,\beta}(x) = \beta\gamma^\beta x^{-\beta-1}, \quad x \geq \gamma.$$

La fonction de répartition de  $X$  s'écrit donc sous la forme

$$F_{\gamma,\beta}(x) = \int_{\gamma}^x \beta\gamma^\beta s^{-\beta-1} ds = -\gamma^\beta s^{-\beta} \Big|_{\gamma}^x = 1 - \left(\frac{\gamma}{x}\right)^\beta, \quad x \geq \gamma.$$

On a alors

$$\text{VaR}_{\alpha,\gamma,\beta}(X) = F_{\gamma,\beta}^{-1}(\alpha) = \gamma(1 - \alpha)^{-1/\beta}. \quad (2.5)$$

À l'instar des lois exponentielle et uniforme, la Valeur-à-Risque d'une variable aléatoire Pareto est une fonction croissante de la volatilité. En effet,  $\text{VaR}_{\alpha,\gamma,\beta}(X)$  croît à mesure que  $\gamma$  augmente et, en autant que  $\beta > 2$ , le paramètre  $\gamma$  s'écrit comme fonction croissante de la volatilité par l'équation

$$\gamma = (\beta - 1) \sqrt{1 - \frac{2}{\beta}} \sqrt{\text{var}(X)}.$$

Cette dernière égalité vient du fait que

$$\text{var}(X) = \frac{\beta\gamma^2}{(\beta - 1)^2(\beta - 2)}. \quad (2.6)$$

Comme la loi Pareto dépend de deux paramètres, la valeur de l'un des deux sera fixée afin d'étudier le comportement de la Valeur-à-Risque en fonction de l'autre. La figure 2.2 présente donc les courbes de  $\text{VaR}_{\alpha,\gamma,\beta}(X)$  pour  $\gamma = 1$  et  $\beta = 3, 7, 30$ . Sur ce graphique, on peut constater que la VaR semble être une fonction décroissante par rapport à  $\beta$ . Ceci s'explique par le fait que la volatilité de  $X$ , c'est-à-dire son écart-type, décroît en fonction de  $\beta$ , comme on peut le déduire de l'équation (2.6).

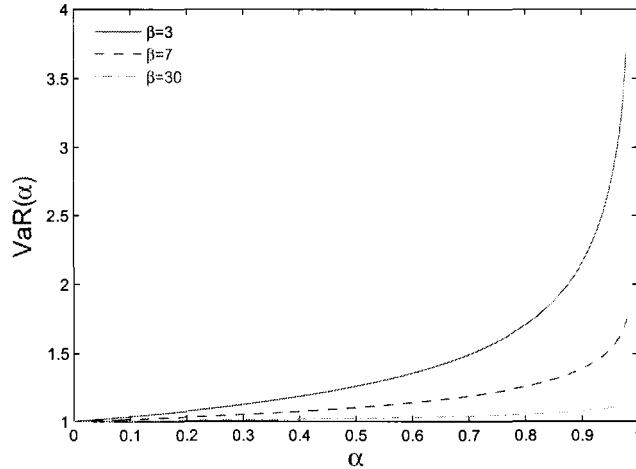


Figure 2.2: Valeur-à-Risque, en fonction de  $\alpha$ , d'une variable de loi Pareto avec  $\gamma = 1$  et  $\beta = 3, 4, 5$

**Exemple 2.6.** Soit  $X$ , une variable aléatoire de loi Cauchy, c'est-à-dire que la densité est donnée par

$$f_{\kappa,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \left\{ 1 + \left( \frac{x - \kappa}{\varepsilon} \right)^2 \right\}^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

En intégrant  $f_{\kappa,\varepsilon}$  sur  $[-\infty, x]$ , on déduit que la fonction de répartition de  $X$  est donnée, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$F_{\kappa,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{x - \kappa}{\varepsilon} \right).$$

Ainsi,

$$\text{VaR}_{\alpha,\kappa,\varepsilon}(X) = F_{\kappa,\varepsilon}^{-1}(\alpha) = \varepsilon \tan \left\{ \pi \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \right\} + \kappa.$$

**Exemple 2.7.** Soit  $X$ , une variable aléatoire de densité

$$f_{\nu,\xi}(x) = \frac{e^{-(x-\nu)/\xi}}{(1 + e^{-(x-\nu)/\xi})^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \xi > 0,$$

c'est-à-dire que  $X$  suit une loi logistique. La fonction de répartition associée à  $f_{\nu,\xi}$  est donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F_{\nu,\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f(s) \, ds = \left(1 + e^{-(x-\nu)/\xi}\right)^{-1}.$$

On peut alors en déduire la Valeur-à-Risque de la variable  $X$ , c'est-à-dire

$$\text{VaR}_{\alpha,\nu,\xi}(X) = -\xi \log\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \nu.$$

La figure 2.3 rapporte  $\text{VaR}_{\alpha,\nu,\xi}(X)$  pour  $\nu = 0$  et  $\xi = 1, 2, 3$ .

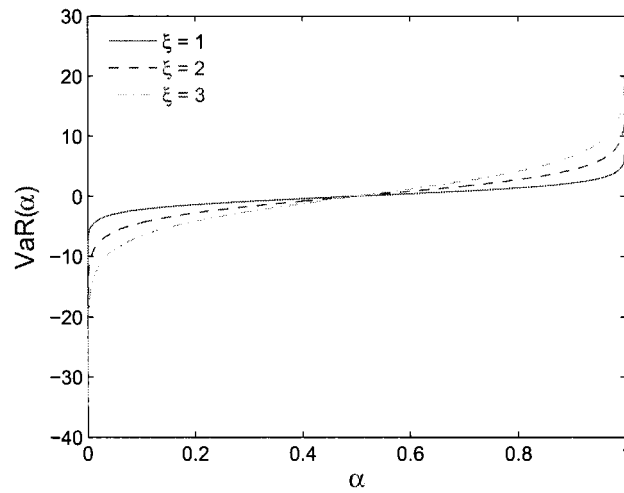


Figure 2.3: Valeur-à-Risque, en fonction de  $\alpha$ , d'une variable de loi logistique avec  $\nu = 0$  et  $\xi = 1, 2, 3$

## CHAPITRE 3

# ANALYSE MULTIVARIÉE ET THÉORIE DES COPULES

La considération de la dépendance entre les actifs financiers est à la base de beaucoup d'activités financières telles l'évaluation des risques et la gestion de portefeuilles. Classiquement, les outils principaux pour traiter cette dépendance entre plusieurs capitaux utilisent la notion de corrélation. Toutefois, cette approche est valide seulement lorsque la nature des liens entre plusieurs actifs est linéaire. Ceci est vrai, entre autres, si le modèle statistique qui s'ajuste à une situation donnée appartient à la famille de distributions dites *elliptiques*, dont font parti les distributions normale et Student multivariées. Cependant il se peut, et il arrive souvent même, que la structure de dépendance qui lie plusieurs actifs soit non-linéaire. En se bornant strictement au cadre classique de la loi normale, on risque alors fortement de sous-estimer les vrais risques encourus.

Pour capter la force de la dépendance, autant dans les cas de liens linéaires que pour des structures non-linéaires, plusieurs statistiques qualifiées de *non paramétriques* ont été proposées. Ces mesures de dépendance possèdent les

propriétés souhaitables de ne pas être influencées par les comportements individuelles des variables, tout en détectant généralement les dépendances de nature non-linéaire entre celles-ci. Typiquement, ces statistiques sont basées sur les rangs des observations. Parmi les plus populaires, on retrouve le tau de Kendall, le rho de Spearman et la statistique de van der Waerden.

Plus récemment, une approche très générale pour traiter tous les types de dépendance, à la fois linéaires et non-linéaires, a été développée. Celle-ci fait appel à la théorie des copules, qui sera étudiée dans ce chapitre. Les copules permettent en effet d'isoler toute la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires, indépendamment des lois marginales. Ainsi, toute notion de dépendance satisfaisante devrait être basée sur les copules. Aussi, une grande variété de modèles de copules sont disponibles pour expliquer la nature des liens entre des variables.

D'abord, quelques rappels de résultats reliés à l'analyse multivariée classique seront présentés. Ensuite, les bases théoriques nécessaires à la compréhension de la théorie des copules seront développées, et quelques propriétés intéressantes seront étudiées.

### 3.1 Lois de probabilité multivariées

Considérons un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , auquel on associe la fonction de répartition

$$H(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n),$$

où  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Les fonctions de répartition marginales associées à  $H$  sont définies par

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Notons que ces dernières peuvent s'exprimer en fonction de  $H$  par

$$F_j(x_j) = H(\infty, \dots, x_j, \dots, \infty), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Si  $H$  est continue, on sait qu'il existe une densité de probabilité  $h$  telle que

$$H(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} h(s_1, \dots, s_n) \, ds_n \cdots ds_1.$$

On en déduit alors la relation

$$h(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} H(x_1, \dots, x_n).$$

De la même façon, on associe les densités marginales  $f_1, \dots, f_n$  aux fonctions de répartition  $F_1, \dots, F_n$  par

$$f_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(x).$$

## 3.2 Lois conditionnelles

Pour deux événements  $A$  et  $B$ , la probabilité conditionnelle de  $A$  étant donné la réalisation de  $B$  est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Pour un couple  $(X_1, X_2)$  de variables aléatoires, on a

$$P(X_1 = x_1 \mid X_2 = x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{h(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}$$

et

$$P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_1 = x_1)} = \frac{h(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}.$$

Ainsi, les densités conditionnelles de  $X_1$  étant donné  $X_2$  et de  $X_2$  étant donné  $X_1$  sont respectivement

$$f_{1|2}(x_1, x_2) = \frac{h(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \quad \text{et} \quad f_{2|1}(x_1, x_2) = \frac{h(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}.$$

### 3.3 Moments conditionnels

À partir des densités conditionnelles, on définit le moment conditionnel d'ordre  $k$  de  $X_1$  étant donné  $X_2$  par

$$E(X_1^k \mid X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k f_{1|2}(x_1, x_2) dx_1.$$

Par conséquent, l'espérance conditionnelle de  $X_1$  étant donné  $X_2$  est décrite par  $E(X_1 \mid X_2 = x_2)$ , et la variance conditionnelle de  $X_1$  étant donné  $X_2$  par

$$\text{var}(X_1 \mid X_2 = x_2) = E(X_1^2 \mid X_2 = x_2) - \{E(X_1 \mid X_2 = x_2)\}^2.$$

Évidemment, on obtient de façon similaire les densités et les moments conditionnels de  $X_2$  étant donné  $X_1$ .

Ci-dessous, des formules utiles concernant la moyenne et la variance conditionnelles sont énoncées.

**Théorème 3.1.** *Pour toutes variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ , on a*

$$E(X_1) = E\{E(X_1 \mid X_2)\}$$



et

$$\text{var}(X_1) = \text{E} \{ \text{var}(X_1|X_2) \} + \text{var} \{ \text{E}(X_1|X_2) \}.$$

### 3.4 Corrélation et indépendance

Les notions de covariance et de corrélation permettent de mesurer la force du lien entre deux variables aléatoires, en autant que celui-ci soit linéaire. La corrélation n'a donc de véritable sens que pour des associations de nature linéaire entre des variables.

**Définition 3.1.** *La covariance et la corrélation entre deux variables  $X_1$  et  $X_2$  sont définies respectivement par*

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \text{E}(X_1 X_2) - \text{E}(X_1)\text{E}(X_2)$$

et

$$\text{cor}(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1)\text{var}(X_2)}}.$$

Deux variables aléatoires sont dites indépendantes si la valeur prise par une des variables n'influence pas le comportement de l'autre. Cela correspond à la factorisation de la loi jointe en un produit des fonctions de répartition marginales, c'est-à-dire que  $H(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ . Cette caractérisation de l'indépendance s'étend au cas multivarié. Spécifiquement, on dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si et seulement si

$$H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_d(x_n). \quad (3.1)$$

Une formulation équivalente en termes des fonctions de densité est

$$h(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_n).$$

**Remarque 3.1.** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} E(X_1 X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) dx_2 \\ &= E(X_1) E(X_2). \end{aligned}$$

*Par conséquent,  $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$ . Pour des variables normales, la réciproque est aussi vraie, ce qui veut dire que si la covariance entre deux variables est nulle, on peut conclure qu'elles sont indépendantes. Ce résultat est toutefois faux en général. En effet, il existe des exemples de variables fortement dépendantes dont la covariance est nulle.*

### 3.5 Loi normale multivariée

Dans cette section, nous allons décrire le modèle normal multivarié. Pour cela, soit  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ , un vecteur de variables aléatoires indépendantes, où  $Z_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  est de loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire. Soit également une matrice carrée symétrique et définie positive  $\Sigma$  à  $n$  dimensions. Alors la distribution normale  $n$ -variée de moyenne  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$  est définie comme la loi du vecteur

$$X = \Sigma^{1/2} Z + \mu$$

où  $\Sigma^{1/2}$  est telle que  $\Sigma = \Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}$ .

Puisque les composantes de  $Z$  sont indépendantes de loi  $N(0, 1)$ , sa densité est donnée par

$$h_Z(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n z_j^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^\top z\right).$$

En considérant le jacobien de la transformation  $X$  décrite précédemment, on en tire la densité de la loi normale  $d$ -variée, c'est-à-dire

$$h_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\}. \quad (3.2)$$

En particulier, la densité de la loi normale à  $d = 2$  dimensions de moyennes  $\mu_1, \mu_2$ , de variances  $\sigma_1, \sigma_2$ , et de corrélation  $\rho$  s'exprime par

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} \\ \times \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left\{\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right].$$

Les propriétés suivantes de la loi normale bivariée sont intéressantes.

1. La loi marginale de  $X_j$  est  $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ ,  $j = 1, 2$ ;
2. On a  $\text{cor}(X_1, X_2) = \rho$ ;
3. La loi de  $aX_1 + bX_2$  est normale de moyenne  $a\mu_1 + b\mu_2$  et de variance  $a^2\mu_1^2 + b^2\mu_2^2 + 2ab\rho\mu_1\mu_2$ ;
4. Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes si et seulement si  $\rho = 0$ .

### 3.6 Les copules

La théorie des copules constitue un outil puissant, flexible et très populaire pour modéliser la dépendance entre plusieurs variables aléatoires. L'important Théorème de Sklar (1959), qui établit le lien entre une copule et la notion probabiliste de fonction de répartition, en est le point de départ. Ce résultat, qui est à la base de la théorie des copules, permet de tenir compte de la structure de dépendance sous-jacente à un vecteur, indépendamment des lois individuelles de chacune de ses composantes.

D'abord, la définition formelle d'une copule est donnée dans le cas bivarié.

**Définition 3.2.** *Une copule à deux dimensions est une fonction  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  qui satisfait, pour tout  $0 \leq u \leq 1$ ,*

$$C(0, u) = C(u, 0) = 0 \quad \text{et} \quad C(u, 1) = C(1, u) = u,$$

*et telle que pour  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$ , on a*

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

*Cette dernière propriété s'appelle la 2-croissance.*

La dernière définition assure que  $C$  est une fonction de répartition de marges uniformes sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Une extension de cette définition au cas général  $n \geq 2$  est également possible. Elle ne sera toutefois pas présentée.

Le théorème suivant, dû à Sklar (1959), met en lumière le fait qu'à partir d'une fonction de répartition multi-dimensionnelle, on peut extraire la copule

qui met en relation chacune de ses fonctions de répartition marginales. En fait, une copule à  $n$  dimensions est une fonction de répartition confinée sur le carré unitaire  $[0, 1]^n$  et dont les marges sont uniformes.

**Théorème 3.2.** *Soit  $H$ , une fonction de répartition à  $n$  dimensions de marges  $F_1, \dots, F_n$ . Alors, il existe une copule  $C$  telle que*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C \{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\}. \quad (3.3)$$

*Si  $F_1, \dots, F_n$  sont continues, alors  $C$  est unique.*

Dans le cas de marges continues, on peut extraire l'unique copule associée à  $H$  en posant  $u_j = F_j(x_j)$  dans l'équation (3.3). On a alors

$$C(u_1, \dots, u_n) = H \{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\}, \quad (3.4)$$

où  $F_j^{-1}$  est l'inverse de  $F_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

**Exemple 3.1.** *Une copule importante est celle associée à l'indépendance multivariée. Pour la définir, soient les variables indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  de lois marginales  $F_1, \dots, F_n$ . Des équations (3.1) et (3.4), on déduit que l'unique copule d'indépendance multivariée s'écrit sous la forme*

$$\begin{aligned} \Pi(u_1, \dots, u_n) &= H \{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\} \\ &= F_1 \{F_1^{-1}(u_1)\} \cdots F_n \{F_n^{-1}(u_n)\} \\ &= u_1 \cdots u_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Exemple 3.2.** *Soit la fonction de répartition*

$$H_\theta(x, y) = \{1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta) e^{-x-y}\}^{-1},$$

dont les marges sont données par

$$F(x) = H_\theta(x, +\infty) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

et

$$G(y) = H_\theta(+\infty, y) = (1 + e^{-y})^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$F^{-1}(u) = -\log\left(\frac{1}{u} - 1\right) \quad \text{et} \quad G^{-1}(v) = -\log\left(\frac{1}{v} - 1\right).$$

Par l'équation (3.4), on déduit que la copule bivariée associée à  $H_\theta(x, y)$  est définie par

$$\begin{aligned} C_\theta(u, v) &= H_\theta\{F^{-1}(u), G^{-1}(v)\} \\ &= \left\{1 + \frac{1}{u} - 1 + \frac{1}{v} - 1 + (1 - \theta) \left(\frac{1}{u} - 1\right) \left(\frac{1}{v} - 1\right)\right\}^{-1} \\ &= \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}. \end{aligned}$$

À noter que cette dernière expression définit la copule d'Ali-Mikhail-Haq, qui contient comme cas particulier la copule d'indépendance à  $\theta = 0$ .

**Exemple 3.3.** Considérons le modèle normal multivarié de moyennes  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$ . Comme la copule ne dépend pas des marges, on peut supposer sans perte de généralité que toutes les moyennes sont nulles et que les variances sont unitaires. Cela revient à supposer que  $\Sigma$  est une matrice de corrélation. Comme cas particulier de l'équation (3.2), on a donc

$$h_\Sigma(s_1, \dots, s_n) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{s}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{s}\right),$$

et ainsi la fonction de répartition associée est

$$H_{\Sigma}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} h_{\Sigma}(s_1, \dots, s_n) \, ds_1 \cdots ds_n.$$

Soit maintenant  $\Phi$ , la fonction de répartition d'une variable de loi  $N(0, 1)$ .

D'après l'équation (3.4), on déduit que la copule normale est

$$\begin{aligned} C_{\Sigma}(u_1, \dots, u_n) &= H_{\Sigma} \{ \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} h_{\Sigma}(s_1, \dots, s_n) \, ds_1 \cdots ds_n. \end{aligned}$$

### 3.7 Propriété d'invariance d'une copule

Un attribut intéressant d'une copule est son invariance par rapport à des transformations strictement croissantes des variables. En effet, si  $(X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur aléatoire de fonction de répartition  $H$  et de marges  $F_1, \dots, F_n$ , alors la copule  $\tilde{C}$  associée à la loi  $\tilde{H}$  de

$$\{t_1(X_1), \dots, t_n(X_n)\},$$

où  $t_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  sont des fonctions strictement croissantes, est la même que la copule  $C$  associée à  $H$ . Pour le montrer, notons d'abord que

$$\tilde{F}_i(x) = \mathbb{P} \{t_i(X_i) \leq x\} = \mathbb{P} \{X_i \leq t_i^{-1}(x)\} = F_i \circ t_i^{-1}(x),$$

ce qui implique que  $\tilde{F}_i^{-1}(t) = t_i \circ F_i^{-1}(t)$ .

On a donc

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(u_1, \dots, u_n) &= \tilde{H} \left\{ \tilde{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \tilde{F}_n^{-1}(u_n) \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ t_1(X_1) \leq \tilde{F}_1^{-1}(u_1), \dots, t_n(X_n) \leq \tilde{F}_n^{-1}(u_n) \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ X_1 \leq t_1^{-1} \circ \tilde{F}_1^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq t_n^{-1} \circ \tilde{F}_n^{-1}(u_n) \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n) \right\} \\
&= H \left\{ F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n) \right\} \\
&= C(u_1, \dots, u_n).
\end{aligned}$$

Ce résultat permet de constater que la structure de dépendance n'est pas affectée par les marges. Autrement dit, on peut normaliser les variables de telles sortes qu'elles soient uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$ , tout en conservant la même nature de dépendance. Cette propriété d'invariance n'est pas partagée par le coefficient de corrélation linéaire, puisque la valeur de celui-ci s'en trouve modifiée si on change les marges.

### 3.8 Bornes de Fréchet–Hoeffding

Pour toute fonction de répartition multivariée  $H$ , on peut montrer que la chaîne d'inégalités

$$H_{\inf}(x_1, \dots, x_n) \leq H(x_1, \dots, x_n) \leq H_{\max}(x_1, \dots, x_n)$$

est vraie pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , où

$$H_{\inf}(x_1, \dots, x_n) = \max \left\{ \sum_{j=1}^n F_j(x_j) - n + 1, 0 \right\}$$



et

$$H_{\max}(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq j \leq n} \{F_j(x_j)\}.$$

En autant que les marges  $F_1, \dots, F_n$  de  $H$  soient continues, ces bornes peuvent se traduire en terme de l'unique copule  $C$  associée à  $H$ . En effectuant les changements de variables  $u_i = F_i(x_i)$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , on obtient alors que pour tout  $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ ,

$$W(u) \leq C(u) \leq M(u),$$

où

$$W(u) = \max \left( \sum_{j=1}^n u_j - n + 1, 0 \right) \quad \text{et} \quad M(u) = \min_{1 \leq j \leq n} \{u_j\}. \quad (3.6)$$

Les fonctions  $W$  et  $M$  sont appelées les bornes de Fréchet–Hoeffding. À noter que  $W$  n'est pas une copule lorsque  $n > 2$ .

### 3.9 Copules archimédiennes

Plusieurs familles de copules ont été introduites, notamment pour des applications en finance. Les plus utilisées sont les copules normale et de Student multivariées, qui sont extraites de leurs équivalents classiques par une application de l'équation (3.4).

Une autre classe intéressante de modèles de dépendance est la famille des copules archimédiennes. Dans celle-ci, on retrouve plusieurs copules souvent utilisées en pratique, en particulier les modèles de Clayton, Frank et Gumbel.

**Définition 3.3.** *On dit que  $C$  est une copule archimédienne multivariée si*

$$C_\phi(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_n) \} \quad (3.7)$$

*en terme d'un générateur  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  continu tel que  $\phi(1) = 0$  et*

$$(-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \phi^{-1}(x) > 0$$

*pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

De cette représentation de  $C_\phi$  en terme d'un générateur à une dimension  $\phi$ , on obtient quelques propriétés intéressantes.

**Proposition 3.1.** *Les propriété suivantes sur les copules archimédiennes sont vrais.*

(i) *Dans le cas  $n = 2$ , la copule  $C_\phi$  est associative, c'est-à-dire que*

$$C_\phi \{ C_\phi(u, v), w \} = C_\phi \{ u, C_\phi(v, w) \}$$

*pour tout  $0 \leq u, v, w \leq 1$ ;*

(ii) *Lorsque  $\phi(t) = -\log t$ , alors  $C_\phi$  est la copule d'indépendance;*

(iii) *Si  $r > 0$  est une constante, alors  $r\phi$  engendre aussi la copule  $C_\phi$ .*

**Démonstration.**

(i) Comme  $\phi \{ C_\phi(u, v) \} = \phi(u) + \phi(v)$ , on a

$$\begin{aligned} C_\phi \{ C_\phi(u, v), w \} &= \phi^{-1} [ \phi \{ C_\phi(u, v) \} + \phi(w) ] \\ &= \phi^{-1} \{ \phi(u) + \phi(v) + \phi(w) \} \\ &= \phi^{-1} [ \phi(u) + \phi \{ C_\phi(v, w) \} ] \\ &= C_\phi \{ u, C_\phi(v, w) \}. \end{aligned}$$

(ii) Si  $\phi(t) = -\log t$ , alors  $\phi^{-1}(x) = \exp(-x)$  et

$$\begin{aligned}
 C_\phi(u_1, \dots, u_n) &= \phi^{-1} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_n) \} \\
 &= \exp \{ -(-\log u_1 - \dots - \log u_n) \} \\
 &= \exp \{ \log(u_1 \cdots u_n) \} \\
 &= u_1 \cdots u_n \\
 &= \Pi(u_1, \dots, u_n).
 \end{aligned}$$

(iii) Si  $\psi(t) = r\phi(t)$ , alors  $\psi^{-1}(x) = \phi^{-1}(x/r)$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
 C_\psi(u_1, \dots, u_n) &= \psi^{-1} \{ \psi(u_1) + \dots + \psi(u_n) \} \\
 &= \psi^{-1} \{ r\phi(u_1) + \dots + r\phi(u_n) \} \\
 &= \phi^{-1} \left\{ \frac{r\phi(u_1) + \dots + r\phi(u_n)}{r} \right\} \\
 &= \phi^{-1} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_n) \} \\
 &= C_\phi(u_1, \dots, u_n).
 \end{aligned}$$

Parmi les copules archimédiennes, on retrouve les copules de Clayton et de Frank générées respectivement, pour  $\theta \geq 0$ , par

$$\phi_{1,\theta}(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta} \quad \text{et} \quad \phi_{2,\theta}(t) = -\log \left( \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

Les copules associées sont alors

$$C_{1,\theta}(u_1, \dots, u_n) = \left( \sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right)^{-1/\theta}$$

et

$$C_{2,\theta}(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \log \left\{ 1 + \frac{\prod_{j=1}^n (e^{-\theta u_j} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\}.$$

## CHAPITRE 4

### BORNES LORSQUE LES MARGES SONT CONNUES

#### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, des bornes à l'intérieur desquelles la Valeur-à-Risque d'un portefeuille devrait se situer seront calculées explicitement. Ces calculs vont compléter ceux effectués par Mesfioui & Quessy (2005).

Soient donc  $X_1, \dots, X_n$ , des variables aléatoires non négatives. Dans le jargon financier et actuariel, de telles variables sont appelées des risques. Supposons que les fonctions de répartition de ces risques, à savoir  $F_1, \dots, F_n$ , sont continues. Dans cette section, on s'intéresse à des bornes supérieures et inférieures de la Valeur-à-Risque de la somme  $S = X_1 + \dots + X_n$ .

Il est à noter que lorsque des variables aléatoires sont *comonotones*, une formule simple pour la Valeur-à-Risque de  $S$  est disponible. Une caractérisation de la comonotonicité pour un ensemble de variables est d'abord donnée dans la définition suivante.

**Définition 4.1.** *Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont dites comonotones si et seulement si il existe des fonctions croissantes  $\xi_1, \dots, \xi_n$  et une variable  $U$  uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 1]$  telles que*

$$X_i = \xi_i(U), \quad 1 \leq i \leq n.$$

De cette définition, on déduit la représentation  $X_i = F_i^{-1}(U)$ , où  $F_i$  est la fonction de répartition de  $X_i$ . Il en découle que si  $X_1, \dots, X_n$  sont comonotones, alors

$$\text{VaR}_\alpha(X_1 + \dots + X_n) = \text{VaR}_\alpha(X_1) + \dots + \text{VaR}_\alpha(X_n).$$

En effet, la définition de la Valeur-à-Risque permet d'écrire

$$\mathbb{P}\{X_1 + \dots + X_n \leq \text{VaR}_\alpha(X_1 + \dots + X_n)\} = \alpha,$$

et de la représentation précédente de variables comonotones, ceci revient à

$$\mathbb{P}\{g(U) \leq \text{VaR}_\alpha(X_1 + \dots + X_n)\} = \alpha,$$

où  $g(u) = F_1^{-1}(u) + \dots + F_n^{-1}(u)$  est une fonction croissante. Ainsi, comme  $\mathbb{P}\{g(U) \leq x\} = g^{-1}(x)$ , on déduit

$$g^{-1}\{\text{VaR}_\alpha(X_1 + \dots + X_n)\} = \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X_1 + \dots + X_n) &= g(\alpha) \\ &= F_1^{-1}(\alpha) + \dots + F_n^{-1}(\alpha) \\ &= \text{VaR}_\alpha(X_1) + \dots + \text{VaR}_\alpha(X_n). \end{aligned}$$

Toutefois, cette expression ne peut pas servir de borne pour le Valeur-à-Risque de  $S$ . En effet, il existe des structures de dépendance telles que  $\text{VaR}_\alpha(S)$  excède la Valeur-à-Risque de la somme de risques comonotones. Cette constatation a motivé des auteurs tels Embrechts et al. (2003) et Mesfioui & Quessy (2005) à proposer des bornes pour  $\text{VaR}_\alpha(S)$ .

Ces résultats seront rappelés dans la Section 4.2. Ensuite, à la Section 4.3, les bornes explicites découvertes par Mesfioui & Quessy (2005), qui sont des extensions des résultats de Embrechts et al. (2003), seront étudiées en détail.

## 4.2 Bornes sur la Valeur-à-Risque de S

Soit un vecteur de risques  $(X_1, \dots, X_n)$  dont la copule  $C$  est inconnue. On suppose néanmoins que de l'information partielle est disponible, à savoir qu'il existe des copules  $C_L$  et  $C_U$  telles que  $C \geq C_L$  et  $C^d \leq C_U^d$ , où

$$C^d(u) = \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\} \right)$$

est le dual associé à une copule  $C$ . Il est souvent plus commode d'écrire

$$C^d(u) = 1 - \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n \{U_i > u_i\} \right),$$

où la formule bien connue de de Morgan fut employée. Par exemple, pour la copule d'indépendance, on a

$$\Pi^d(u) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(U_i > u_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - u_i).$$

Afin de borner la Valeur-à-Risque de  $S$ , des bornes sur la fonction de répartition de  $S$ , notée  $F_S$ , seront d'abord décrites. La version présentée ici se trouve dans l'article de Cossette et al. (2002). On y établit que

$$\underline{F}(s) \leq F_S(s) \leq \overline{F}(s),$$

où

$$\underline{F}(s) = \sup_{u_1 + \dots + u_n = s} C_L \{F_1(u_1), \dots, F_n(u_n)\}$$

et

$$\overline{F}(s) = \inf_{u_1 + \dots + u_n = s} C_U^d \{F_1(u_1), \dots, F_n(u_n)\}.$$

À noter qu'ici,  $\underline{F}(s)$  et  $\overline{F}(s)$  sont elles-mêmes des fonctions de répartitions. Les formules précédentes sont des extensions multivariées d'un résultat analogue de Makarov (1981), indépendamment trouvé par Rüschendorf (1982).

Le résultat suivant est un cas particulier du Théorème 4.3 de Embrechts et al. (2003), où la Valeur-à-Risque d'une fonction  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  risques est considérée.

**Théorème 4.3.** *Soient les risques  $X_1, \dots, X_n$ , respectivement de fonctions de répartitions marginales continues  $F_1, \dots, F_n$ . S'il existe des copules  $C_L$  et  $C_U$  telles que la copule  $C$  du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  satisfait  $C \geq C_L$  et  $C^d \leq C_U^d$ , alors*

$$\underline{\text{VaR}}_{C_U}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(S) \leq \overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha),$$

où

$$\underline{\text{VaR}}_{C_U}(\alpha) = \sup_{C_U^d(u_1, \dots, u_n) = \alpha} \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(u_i) \quad (4.1)$$

et

$$\overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha) = \inf_{C_L(u_1, \dots, u_n) = \alpha} \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(u_i). \quad (4.2)$$

Une approche qui facilitera la manipulation des equations (4.1) et (4.2) consiste à réduire ce problème d'optimisation à  $n-1$  variables. Pour cela, notons  $u^{\setminus n} = (u_1, \dots, u_{n-1})$ , le vecteur obtenu en enlevant la  $n$ -ème composante de  $u = (u_1, \dots, u_n)$ . Ensuite, pour  $u^{\setminus n}$  fixé, on introduit les fonctions non-décroissantes

$$x \mapsto C_{u^{\setminus n}}(x) = C(u^{\setminus n}, x) \quad \text{et} \quad x \mapsto C_{u^{\setminus n}}^d(x) = C^d(u^{\setminus n}, x)$$

et on note respectivement par  $C_{u^{\setminus n}}^{-1}$  et  $(C_{u^{\setminus n}}^d)^{-1}$  leurs inverses généralisés. Mesfioui & Quessy (2005) ont obtenu l'adaptation suivante du Théorème 4.3.

**Proposition 4.1.** *Soient les risques  $X_1, \dots, X_n$  de fonctions de répartition continues  $F_1, \dots, F_n$ . S'il existe des copules  $C_L$  et  $C_U$  telles que la copule  $C$  du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  satisfait  $C \geq C_L$  et  $C^d \leq C_U^d$ , alors*

$$\underline{\text{VaR}}_{C_U}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(S) \leq \overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha),$$

où

$$\underline{\text{VaR}}_{C_U}(\alpha) = \sup_{C_U^d(u^{\setminus n}, 0) \leq \alpha} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{-1}(u_i) + F_n^{-1} \left\{ \left( C_{U, u^{\setminus n}}^d \right)^{-1}(\alpha) \right\} \right]$$

et

$$\overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha) = \inf_{C_L(u^{\setminus n}, 1) \geq \alpha} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{-1}(u_i) + F_n^{-1} \left\{ C_{L, u^{\setminus n}}^{-1}(\alpha) \right\} \right].$$



### 4.3 Bornes explicites sur la Valeur-à-Risque de S

Dans cette section, on s'intéresse à établir des expressions explicites des bornes décrites au Théorème 4.3. La borne inférieure sera d'abord étudiée lorsque aucune information sur la structure de dépendance des risques n'est disponible. Ensuite, un résultat intéressant concernant la borne supérieure sera énoncé et son utilité sera illustrée à l'aide de nombreux exemples.

#### 4.3.1 Borne inférieure

De l'équation (4.1), on déduit que  $\text{VaR}_\alpha(S)$  est bornée inférieurement par

$$\underline{\text{VaR}}_{\widetilde{W}}(\alpha) = \sup_{u_1 + \dots + u_n = \alpha} \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(u_i),$$

puisque  $C^d \leq \widetilde{W}^d = \min(1, u_1 + \dots + u_n)$ . Cette maximisation peut conduire à des résultats explicites dans certaines situations assez générales. En effet, si les densités associées aux risques sont non-croissantes sur un certain intervalle, alors la fonction à maximiser sera convexe. Cette condition est cruciale pour l'obtention du résultat suivant, dû à Mesfioui & Quessy (2005), où il est supposé que pour tous les  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la densité  $f_i$  de  $X_i$  est dérivable.

**Proposition 4.2.** *Supposons que pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe un nombre  $x_i^*$  tel que  $f_i(x)$  est non-croissante pour tout  $x \leq x_i^*$ . Alors, pour*

$\alpha \leq \min \{F_1(x_1^*), \dots, F_n(x_n^*)\}$ , on a

$$\underline{\text{VaR}}_{\widetilde{W}}(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F_i^{-1}(\alpha) + \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} F_j^{-1}(0) \right\}. \quad (4.3)$$

Pour des risques uniformément distribués, l'équation (2.3) substitué dans l'équation (4.3) nous permet d'écrire

$$\underline{\text{VaR}}_{\widetilde{W}}(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ (1 - \alpha)c_i + d_i\alpha + \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} c_j \right\}.$$

**Remarque 4.1.** Lorsque  $F_j^{-1}(0) = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , l'équation (4.3) se réduit à

$$\underline{\text{VaR}}_{\widetilde{W}}(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \text{VaR}_\alpha(X_i) \}.$$

Ceci survient en particulier pour les lois exponentielle et Pareto. Ainsi, pour des risques  $X_1, \dots, X_n$  de lois respectives exponentielle de paramètre  $\lambda_i$ , on tire de l'équation (2.2) que

$$\underline{\text{VaR}}_{\widetilde{W}}(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ F_{\lambda_i}^{-1}(\alpha) \} = -\log(1 - \alpha) \max_{1 \leq i \leq n} \{ \lambda_i \}.$$

Si les risques sont de lois respectives Pareto de paramètres  $(\gamma_i, \beta_i)$ , alors en utilisant l'équation (2.5), on a

$$\underline{\text{VaR}}_{\widetilde{W}}(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ F_{\gamma_i, \beta_i}^{-1}(\alpha) \} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \gamma_i(1 - \alpha)^{-1/\beta_i} \}.$$

### 4.3.2 Borne supérieure

La prochaine proposition, due à Mesfioui & Quessy (2005), généralise une observation faite par Embrechts et al. (2000), qui ont évalué la borne supérieure

$\overline{\text{VaR}}_W(\alpha)$  pour la sommes de deux risques comonotones dans les cas particuliers de distributions Pareto et gamma.

Avant d'énoncer le résultat, on suppose que la fonction de répartition du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  s'écrit

$$H(x_1, \dots, x_n) = C\{F(x_1), \dots, F(x_n)\},$$

où la copule  $C$  est inconnue et  $F$  est la fonction de répartition marginale commune à chaque risque. On demande aussi que les hypothèses A1 et A2 suivantes soient vraies.

A1. Il existe un nombre  $x^* \geq 0$  tel que la densité  $f(x) = dF(x)/dx$  est dérivable et non croissante pour tout  $x \geq x^*$ .

A2. Il existe une copule échangeable  $C_L$  telle que  $C \geq C_L$  et

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} C_{L, u}^{-1} \geq 0, \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Une copule  $C$  est dite échangeable si

$$C(u_1, \dots, u_n) = C(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)})$$

pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  et toute permutation  $\tau$  des nombres  $\{1, \dots, n\}$ .

**Proposition 4.3.** *Soit  $\delta_{C_L}(t) = C_L(t, \dots, t)$ , la section diagonale de  $C_L$ . Si les hypothèses A1 et A2 sont satisfaites, alors pour  $\alpha \geq F(x^*)$ , on a  $\text{VaR}_\alpha(S) \leq \overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha)$ , où*

$$\overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha) = nF^{-1}\{\delta_{C_L}^{-1}(\alpha)\}. \quad (4.4)$$

À noter que l'hypothèse A1 est vérifiée pour plusieurs lois utilisées fréquemment en finance. Par exemple, puisque pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dx}f_\lambda(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2}e^{-x/\lambda} \leq 0,$$

où  $f_\lambda$  est la densité associée à  $F_\lambda$ , A1 est vraie pour la loi exponentielle avec  $x^* = 0$ . Pour la loi uniforme sur l'intervalle  $[c, d]$ , A1 est vraie pour  $x^* = c$  car  $df_{c,d}(x)/dx = 0$  pour  $c \leq x \leq d$ . Pour la Pareto, on a pour  $x \geq \gamma$  que

$$\frac{d}{dx}f_{\gamma,\beta}(x) = \frac{d}{dx}\beta\gamma^\beta x^{-\beta-1} = -\beta(\beta+1)\gamma^\beta x^{-\beta-2} \geq 0,$$

et A1 est satisfaite avec  $x^* = \gamma$ . Dans chacun de ces cas,  $F(x^*) = 0$  et la borne  $\overline{\text{VaR}}_{C_L}(\alpha)$  est donc valide pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exemple 4.1.** *Quand aucune information sur la structure de dépendance d'un vecteur aléatoire n'est disponible, on sait néanmoins que  $C \geq W$ , où  $W$  est la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding décrite en (3.6). Comme*

$$W_{u \setminus n}^{-1}(x) = x + n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i,$$

on a

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} W_{u \setminus n}^{-1}(x) = 0.$$

Puisque  $W$  est échangeable, l'hypothèse A2 est satisfaite. On calcule ensuite

$\delta_W(t) = W(t, \dots, t) = \max(nt - n + 1, 0)$ , et alors

$$\delta_W^{-1}(\alpha) = \frac{\alpha + n - 1}{n}.$$

Ainsi, pour des risques  $X_1, \dots, X_n$  dont la fonction de répartition commune  $F$  satisfait A1, on a

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(S) \leq nF^{-1}\left(\frac{\alpha + n - 1}{n}\right). \quad (4.5)$$

Comme  $F^{-1}$  est une fonction croissante et

$$\frac{\alpha + n - 1}{n} > \alpha,$$

la borne pour  $\overline{\text{VaR}}_\alpha(S)$  décrite à l'équation (4.5) est strictement plus grande que la valeur-à-risque de la somme de variables comonotones, c'est-à-dire  $nF^{-1}(\alpha)$ . Cette observation était prévisible puisqu'il existe des structures de dépendance qui amène une Valeur-à-Risque de  $S$  plus grande que lors de la comonotonicité. La borne (4.5) permet d'englober cette situation.

Les équations (2.2), (2.3) et (2.5), jumelées à (4.5), permettent d'obtenir des bornes explicites pour la VaR d'une somme de risques de lois exponentielle, uniforme et Pareto. On a respectivement

$$\begin{aligned} nF_\lambda^{-1}\left(\frac{\alpha + n - 1}{n}\right) &= -n\lambda \log\left(\frac{1 - \alpha}{n}\right), \\ nF_{c,d}^{-1}\left(\frac{\alpha + n - 1}{n}\right) &= (1 - \alpha)c + (\alpha + n - 1)d, \end{aligned}$$

et

$$nF_{\gamma,\beta}^{-1}\left(\frac{\alpha + n - 1}{n}\right) = n^{1+1/\beta}\gamma(1 - \alpha)^{-1/\beta}.$$

**Exemple 4.2.** Dans certaines applications, il arrive que l'hypothèse  $C \geq \Pi$ , où  $\Pi$  est la copule d'indépendance définie en (3.5), soit acceptable. On dit alors que les risques sont dépendants positifs par quadrant. Puisque

$$\Pi_{u \setminus n}^{-1}(x) = x \left/ \prod_{i=1}^{n-1} u_i \right.,$$

on montre que

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \Pi_{u \setminus n}^{-1}(x) = \frac{\Pi_{u \setminus n}^{-1}(x)}{u_i u_j} \geq 0.$$

Comme  $\Pi$  est échangeable, A2 est vraie. Ensuite, puisque  $\delta_\Pi(t) = t^n$ , on a  $\delta_\Pi^{-1}(\alpha) = \alpha^{1/n}$ . Ainsi, pour des risques  $X_1, \dots, X_n$  dépendants positifs par quadrant dont la fonction de répartition commune  $F$  satisfait A1, on a

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(S) \leq nF^{-1}(\alpha^{1/n}). \quad (4.6)$$

De l'exemple précédent, on peut calculer explicitement une borne pour la somme de risques dépendants positifs par quadrant lorsque les lois marginales sont exponentielles, uniformes ou Pareto. On a respectivement

$$\begin{aligned} nF_\lambda^{-1}(\alpha^{1/n}) &= -n\lambda \log(1 - \alpha^{1/n}), \\ nF_{c,d}^{-1}(\alpha^{1/n}) &= (1 - \alpha^{1/n})c + d\alpha^{1/n}, \\ nF_{\gamma,\beta}^{-1}(\alpha^{1/n}) &= \gamma(1 - \alpha^{1/n})^{-1/\beta}. \end{aligned}$$

**Exemple 4.3.** Supposons que  $C \geq C_\phi$ , où la copule  $C_\phi$  est décrite par l'équation (3.7). Autrement dit, la copule inconnue  $C$  est minorée par une fonction de dépendance archimédienne. Puisque

$$C_{\phi, u \setminus n}^{-1}(t) = \phi^{-1} \{ \phi(t) - \phi(u_1) - \dots - \phi(u_{n-1}) \},$$

on déduit d'une extension multivariée du Théorème 4.3.2 de Nelsen (1999), qui montre que  $\phi^{-1} \{ \phi(t) - \phi(u_1) \}$  est convexe, que l'Hypothèse A2 est satisfaite. On peut alors calculer

$$\delta_\phi(t) = \phi^{-1} \{ n\phi(t) \},$$

d'où on tire

$$\delta_\phi^{-1}(\alpha) = \phi^{-1} \left\{ \frac{\phi(\alpha)}{n} \right\}. \quad (4.7)$$

En jumelant cette dernière expression avec l'équation (4.3), on obtient

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq nF^{-1} \left[ \phi^{-1} \left\{ \frac{\phi(\alpha)}{n} \right\} \right]. \quad (4.8)$$

Comme cas particuliers, on a  $\phi_W(t) = 1 - t$  et  $\phi_\Pi(t) = -\log t$ . Ces fonctions sont les générateurs respectifs des copules  $W$  et  $\Pi$ . On peut alors retrouver les expressions obtenues précédemment aux équations (4.5) et (4.6).

Supposons que  $\phi$  est le générateur d'un membre de la famille de copules de Clayton, c'est-à-dire

$$\phi(t) = \phi_{1,\theta}(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \quad \text{où } \theta \geq -1.$$

Comme cas limites, on retrouve la copule de Fréchet inférieure  $W$  lorsque  $\theta \rightarrow -1$ , et la copule d'indépendance  $\Pi$  quand  $\theta \rightarrow 0$ . D'après (4.7),

$$\delta_{\phi_\theta}^{-1}(\alpha) = \left( \frac{\alpha^{-\theta} + n - 1}{n} \right)^{-1/\theta},$$

et de l'équation (4.8), on tire

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq nF^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha^{-\theta} + n - 1}{n} \right)^{-1/\theta} \right\}. \quad (4.9)$$

Dans le cas particulier où  $F$  est la fonction de répartition d'une loi exponentielle, on obtient

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq -n\lambda \log \left\{ 1 - \left( \frac{\alpha^{-\theta} + n - 1}{n} \right)^{-1/\theta} \right\}.$$

La figure 4.1 trace cette borne lorsque  $n = 2$  et  $\lambda = 1$ , c'est-à-dire

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq -2 \log \left\{ 1 - \left( \frac{\alpha^{-\theta} + 1}{2} \right)^{-1/\theta} \right\},$$

pour  $\alpha = 0.9, 0.95, 0.975$ . on observe alors le comportement de cette borne en fonction du paramètre de dépendance  $\theta$ . On constate que plus la dépendance est forte, i.e. quand  $\theta$  augmente, la valeur de  $\text{VaR}_\alpha(S)$  diminue. Ainsi, l'augmentation de  $\theta$ , qui correspond à une augmentation de l'information disponible sur  $C$ , améliore la borne supérieure de la VaR de  $S$ .

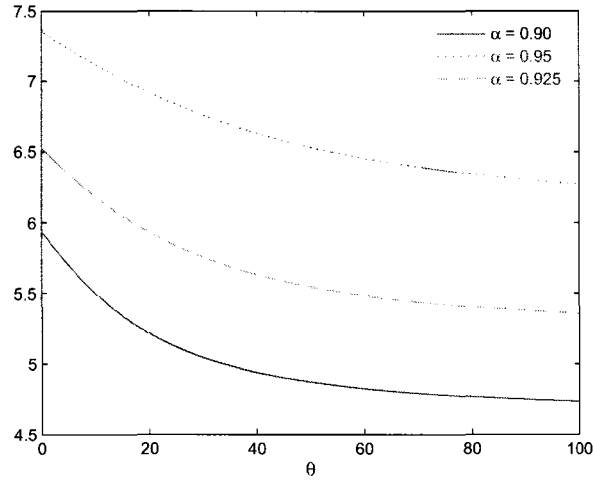


Figure 4.1: Borne sur la VaR de  $X_1 + X_2$  en fonction du paramètre de dépendance d'une copule de Clayton, où  $X_i \sim \exp(1)$

La copule de Frank est caractérisée quant à elle par le générateur

$$\phi(t) = \phi_{2,\theta}(t) = -\log \left( \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

D'après (4.7),

$$\delta_{\phi_\theta}^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\theta} \log \left\{ \left( \frac{e^{-\theta\alpha} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)^{1/n} (e^{-\theta} - 1) + 1 \right\},$$

et de l'équation (4.8), on tire

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq nF^{-1} \left[ -\frac{1}{\theta} \log \left\{ \left( \frac{e^{-\theta\alpha} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)^{1/n} (e^{-\theta} - 1) + 1 \right\} \right]. \quad (4.10)$$



Dans le cas particulier où  $F$  est la fonction de répartition associée à la loi exponentielle, on obtient

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq -n\lambda \log \left[ 1 + \frac{1}{\theta} \log \left\{ \left( \frac{e^{-\theta\alpha} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)^{1/n} (e^{-\theta} - 1) + 1 \right\} \right].$$

La figure 4.2 trace cette borne en fonction de  $\theta$  pour des valeurs fixes de  $\alpha$ , lorsque  $n = 2$  et  $\lambda = 1$ . Encore une fois, on voit que lorsque la valeur de la dépendance croît, i.e. que  $\theta$  augmente, la borne de la Valeur-à-Risque de  $S = X_1 + X_2$  est améliorée.

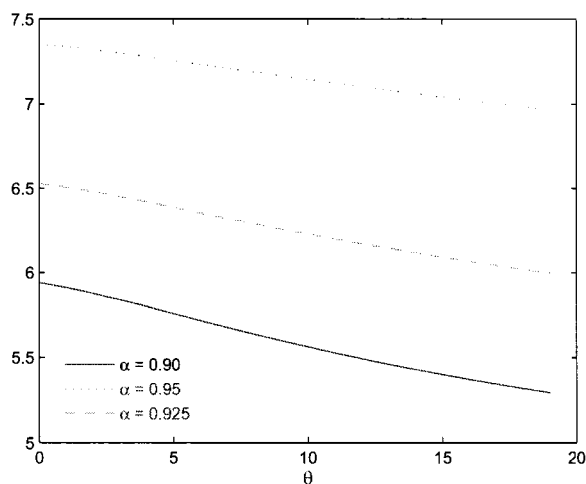


Figure 4.2: Borne sur la VaR de  $X_1 + X_2$  en fonction du paramètre de dépendance d'une copule de Frank, où  $X_i \sim \exp(1)$

Le générateur de la famille de Gumbel est

$$\phi(t) = \phi_{3,\theta}(t) = (\log t)^{1/(1-\theta)}.$$

Comme cas limites, on retrouve la copule de Fréchet inférieur  $W$  lorsque

$\theta = 1$ , et la copule d'indépendance  $\Pi$  quand  $\theta \rightarrow 0$ . D'après (4.7),

$$\delta_{\phi_\theta}^{-1}(\alpha) = \alpha^{n^{\theta-1}},$$

et de l'équation (4.8), on tire

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq nF^{-1}\left(\alpha^{n^{\theta-1}}\right). \quad (4.11)$$

Pour une loi exponentielle, on aura

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq -n\lambda \log\left(1 - \alpha^{n^{\theta-1}}\right).$$

La Figure 4.3 trace cette borne en fonction de  $\theta$  pour des valeurs fixes de  $\alpha$ , lorsque  $n = 2$  et  $\lambda = 1$ . Là aussi, on constate que l'augmentation de la dépendance améliore la borne de la Valeur-à-Risque.

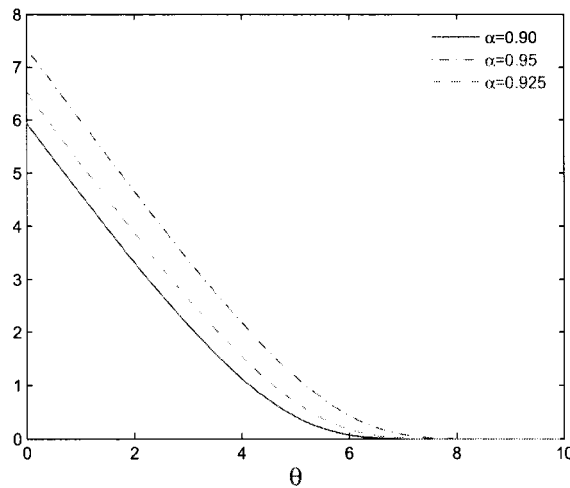


Figure 4.3: Borne sur la VaR de  $X_1 + X_2$  en fonction du paramètre de dépendance d'une copule de Gumbel, où  $X_i \sim \exp(1)$

## CHAPITRE 5

### BORNES LORSQUE LES MOYENNES ET LES VARIANCES SONT CONNUES

#### 5.1 Construction des bornes

L'objectif de ce chapitre consiste à étudier les bornes de la Valeur-à-Risque de la somme de  $n$  risques lorsque les distributions marginales sont partiellement connues. Premièrement, il est possible de borner la fonction de répartition d'une variable aléatoire lorsque seulement sa moyenne et sa variance sont connues. En effet, supposons qu'une variable aléatoire  $X$  est telle que  $E(X) = \mu_X > 0$  et  $\text{var}(X) = \sigma_X^2 > 0$  sont connues. Dans leur article, Kaas & Goovaerts (1986) ont montré que

$$\underline{F}_{\mu_X, \sigma_X}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}_{\mu_X, \sigma_X}(x),$$

où

$$\underline{F}_{\mu_X, \sigma_X}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \mu_X \\ \frac{x - \mu_X}{x}, & \mu_X < x \leq \frac{\sigma_X^2 + \mu_X^2}{\mu_X} \\ \frac{(x - \mu_X)^2}{(x - \mu_X)^2 + \sigma_X^2}, & x > \frac{\sigma_X^2 + \mu_X^2}{\mu_X} \end{cases}$$

et

$$\overline{F}_{\mu_X, \sigma_X}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + (x - \mu_X)^2}, & 0 \leq x \leq \mu_X \\ 1, & x > \mu_X. \end{cases}$$

Ensuite, pour borner la Valeur-à-Risque de  $S = X_1 + \dots + X_n$  lorsque seulement les deux premiers moments de  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont connus, Mesfioui & Quessy (2005) obtiennent d'abord des extremums sur la Valeur-à-Risque d'une variable aléatoire dont seuls les deux premiers moments sont connus. Pour y arriver, ils inversent les fonctions  $\underline{F}_{\mu_X, \sigma_X}$  et  $\overline{F}_{\mu_X, \sigma_X}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \{\mu_X - \sigma_X q(1 - \alpha)\} \mathbf{1}(\alpha \geq s_X) &\leq \text{VaR}_\alpha(X) \\ &\leq \mu_X + \mu_X q^2(\alpha) \mathbf{1}(\alpha \leq s_X) + \sigma_X q(\alpha) \mathbf{1}(\alpha > s_X), \end{aligned} \quad (5.1)$$

où

$$s_X = \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2 + \sigma_X^2} \quad \text{et} \quad q(u) = \sqrt{\frac{u}{1-u}}.$$

Finalement, ils mettent en application une approche similaire à celle explorée par Genest et al. (2002) dans un contexte de primes *stop-loss*. Spécifiquement,

si  $R$  dénote la matrice de corrélation associée au vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$ , alors les deux premiers moments de  $S$  s'expriment par

$$\mu = E(S) = \mu_1 + \dots + \mu_n$$

et

$$\sigma^2(R) = \text{var}(S) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \sigma_i \sigma_j R_{ij}.$$

Ainsi, en utilisant les bornes de l'équation (5.1) et en optimisant par rapport à chacune des valeurs  $R_{ij} \in [-1, 1]$  de la matrice  $R$ , on a

$$\begin{aligned} \{\mu - \sigma q(\alpha)\} \mathbf{1}(\alpha \geq s) &\leq \text{VaR}_\alpha(S) \\ &\leq \frac{\mu}{1 - \alpha} \mathbf{1}(\alpha \leq s) + \sigma q(\alpha) \mathbf{1}(\alpha \geq s), \end{aligned} \quad (5.2)$$

où

$$\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_n \quad \text{et} \quad s = \frac{\sigma^2}{\mu^2 + \sigma^2}.$$

## 5.2 Illustrations

Dans cette partie du mémoire, quelques illustrations des bornes tirées des chaînes d'inégalités (5.1) et (5.2) seront présentées pour certaines combinaisons de valeurs données aux moyennes et aux variances.

La première illustration concerne les bornes sur la Valeur-à-Risque d'une variable aléatoire univariée dont seuls les deux premiers moments sont connus. Supposons donc que  $X$  est un risque de moyenne  $\mu_X = 5$  et de variance

$\sigma_X^2 = 1$ . Le graphique suivant donne le comportement des bornes (5.1) en fonction du niveau  $\alpha$ .

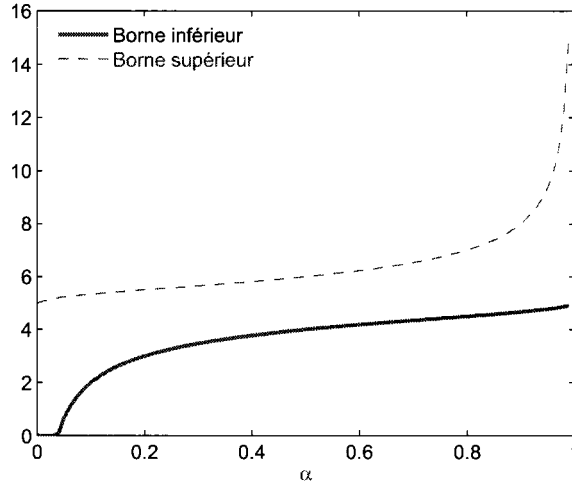


Figure 5.1: Bornes de la Valeur-à-Risque d'une variable aléatoire de moyenne  $\mu_X = 5$  et de variance  $\sigma_X^2 = 1$

Soient maintenant deux risques  $X_1, X_2$  de moyennes  $\mu_1, \mu_2$  et de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ . On s'intéressera, dans tout ce qui suit, à illustrer les bornes de l'inégalité (5.2) sous différents scénarios.

Pour les deux prochains graphiques, on fixe les valeurs des variances à  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1/4$  afin d'observer l'influence des moyennes des risques sur les bornes. Les trois courbes rapportées aux figures 5.2 et 5.3 correspondent à  $\mu_1 = \mu_2 = i/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , respectivement pour la borne inférieure et supérieure. Dans ce cas on déduit que  $\sigma = 1$  et  $\mu = 1, 2, 3$ . Il est alors clair, à l'observation de ces figures, que les bornes de  $\text{VaR}_\alpha(S)$  augmentent en fonction de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

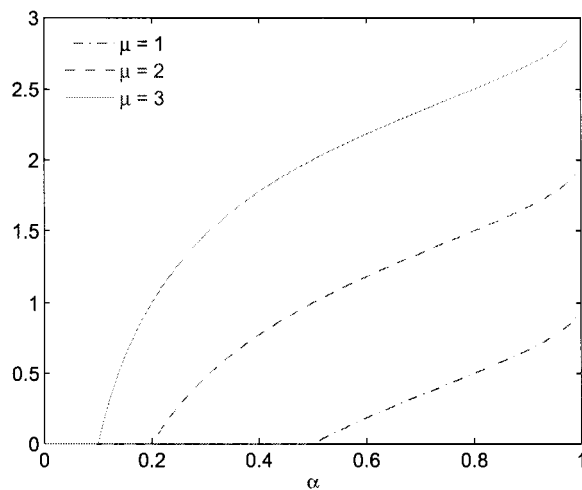


Figure 5.2: Influence de  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  sur la borne inférieure de la Valeur-à-Risque de  $S = X_1 + X_2$  pour  $\sigma = 1$  et  $\mu = 1, 2, 3$

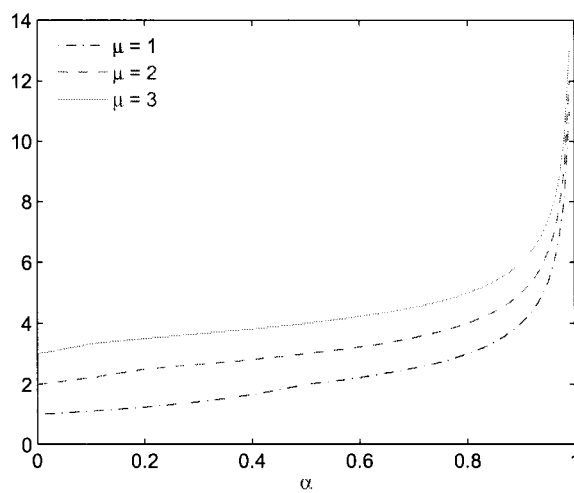


Figure 5.3: Influence de  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  sur la borne supérieure de la Valeur-à-Risque de  $S = X_1 + X_2$  pour  $\sigma = 1$  et  $\mu = 1, 2, 3$

Pour les deux dernières illustrations, l'influence des variances sur les bornes inférieures et supérieures sera explorée, en fixant la valeur des moyennes des risques à  $\mu_1 = 2$  et  $\mu_2 = 3$ . La figure 5.4 trace les courbes de la borne inférieure, en fonction de  $\alpha$ , pour  $\sigma_1 = \sigma_2 = i/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Selon ce graphe, on remarque que la borne inférieure diminue en fonction de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

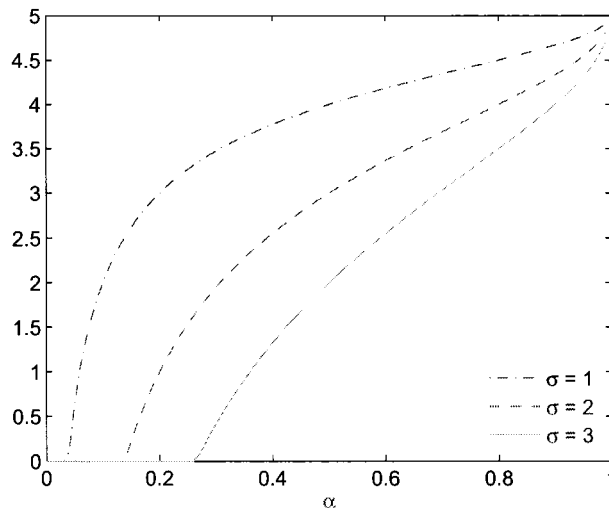


Figure 5.4: Influence de  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  sur la borne inférieure de la Valeur-à-Risque de  $S = X_1 + X_2$  pour  $\mu = 5$  et  $\sigma = 1, 2, 3$

La figure 5.5, quant à elle, présente quelques courbes de la borne supérieure pour les mêmes valeurs des paramètres que l'illustration précédente. Ici, contrairement à la borne inférieure, la borne supérieure augmente en fonction des variances de  $X_1$  et  $X_2$ .



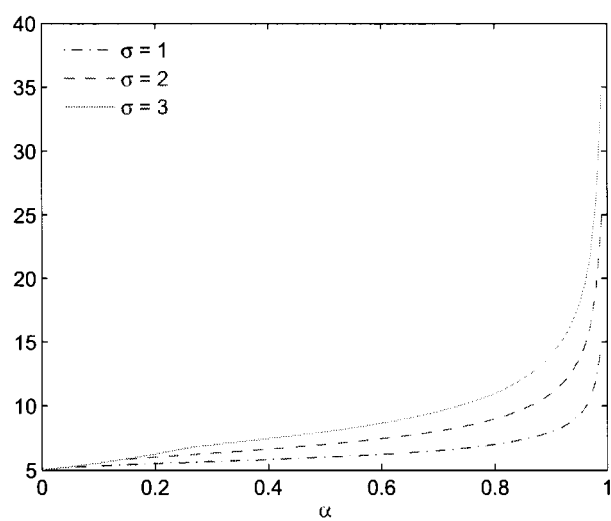


Figure 5.5: Influence de  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  sur la borne supérieure de la Valeur-à-Risque de  $S = X_1 + X_2$  pour  $\mu = 5$  et  $\sigma = 1, 2, 3$

## CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail consistait à étudier des bornes sur une mesure de risque financier, appelée la *Valeur-à-Risque*, dans le contexte général d'un portefeuille constitué de plusieurs risques. Dans une première étape, une définition formelle de la Valeur-à-Risque a été présentée, et quelques propriétés utiles ont été énoncées et démontrées. Ensuite, des calculs explicites de la Valeur-à-Risque ont été détaillés pour plusieurs lois statistiques d'usage est fréquent en finance. Une brève introduction à la théorie des copules, qui trouve une grande utilité dans la modélisation de vecteurs aléatoires, a par la suite été présentée. En particulier, une copule permet d'ajuster un modèle semi-paramétrique qui capture l'essentiel de la structure de dépendance de plusieurs actifs financiers, sans égard aux lois marginales.

Dans les deux derniers chapitres du mémoire, les bornes sur la Valeur-à-Risque obtenues et étudiées par Embrechts et al. (2005) et Mesfioui & Quessy (2005) ont d'abord été énoncées, puis calculées explicitement pour différents scénarios de dépendance. En particulier, ces bornes permettent d'anticiper la valeur maximale du risque induit par un portefeuille de  $n$  risques. Selon l'information fournie sur les risques, deux contextes ont été explorés, à savoir

- la situation où les lois marginales des risques sont connues;
- le cas où seules les moyennes et les variances des actifs sont connues.

Dans le premier contexte, la structure de dépendance, représentée par une copule, est toujours supposée inconnue, ce qui se produit généralement en pratique. En effet, il est habituellement difficile de conjecturer à propos de la nature de la dépendance entre des actifs financiers. Dans le deuxième, la dépendance est plutôt représentée par la matrice de corrélation, notion classique en analyse multivariée, associée au vecteur des risques.

Évidemment, l'information disponible est moins complète dans la situation où seuls les deux premiers moments sont disponibles que lorsque les lois sont entièrement connues. Par conséquent, on s'attendait à ce que les bornes obtenues dans le deuxième contexte sont moins précises que dans le premier. Ceci a été constaté à la fois de façon analytique et graphiquement.

Dans le futur, il serait intéressant de généraliser les résultats présentés dans ce mémoire à la Valeur-à-Risque multidimensionnelle proposée par Embrechts & Puccetti (2006). Une première étape consisterait à étudier ses propriétés et tenter d'effectuer des calculs explicites pour quelques lois multivariées connues. Ensuite, la *fonction de linkage*, qui généralise la notion de copule, pourrait être mise à profit afin de borner la Valeur-à-Risque multivariée.

# Références

- ALEXANDER, C. (2001). *Market Model: A guide to Financial Data Analysis*. John Wiley et Sons.
- BUTLER, C. (1999). *Mastering Value at Risk: A step by step guide to understanding and applying VaR*. Market editions.
- CALVET, L. (2000). *La gestion globale des risques du marché: de la "Value at Risk" à "CorporateMetrics"*. Université d'Ottawa.
- COSSETTE, H., DENUIT, M. & MARCEAU, É. (2002). Distributional bounds for functions of dependent risks. *Schweiz. Aktuarver. Mitt.* **1**, 45–65.
- DUFFIE, D. & JUN, P. (1997). An overview of value at risk. *The journal of Derivatives* **4**, 7–49.
- EMBRECHTS, P., HÖING, A. & JURI, A. (2003). Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance Stoch.* **7**, 145–167.
- EMBRECHTS, P., HÖING, A. & PUCCETTI, G. (2005). Worst VaR scenarios. *Insurance Math. Econom.* **37**, 115–134.

- EMBRECHTS, P., MCNEIL, A. J. & STRAUMANN, D. (2000). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In *Risk management: value at risk and beyond (Cambridge, 1998)*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 176–223.
- EMBRECHTS, P. & PUCETTI, G. (2006). Bounds for functions of multivariate risks. *J. Multivariate Anal.* **97**, 526–547.
- GENEST, C., MARCEAU, É. & MESFIOUI, M. (2002). Upper stop-loss bounds for sums of possibly dependent risks with given means and variances. *Statist. Probab. Lett.* **57**, 33–41.
- KAAS, R. & GOOVAERTS, M. J. (1986). Best bounds for positive distributions with fixed moments. *Insurance Math. Econom.* **5**, 87–95. With a discussion by G. C. Taylor.
- LONGLEY-COOK, A. G. (1998). Value at risk (VAR). *N. Am. Actuar. J.* **2**, 118–119.
- MAKAROV, G. D. (1981). Estimates for the distribution function of the sum of two random variables with given marginal distributions. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **26**, 815–817.
- MARKOWITZ, H. M. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance* **12**, 77–91.
- MARKOWITZ, H. M. (1970). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press.

- MESFIOUI, M. & QUESSY, J.-F. (2005). Bounds on the value-at-risk for the sum of possibly dependent risks. *Insurance Math. Econom.* **37**, 135–151.
- NELSEN, R. B. (1999). *An introduction to copulas*, vol. 139 of *Lecture Notes in Statistics*. New York: Springer-Verlag.
- RÜSCHENDORF, L. (1982). Random variables with maximum sums. *Adv. in Appl. Probab.* **14**, 623–632.
- SHARP, W. (1963). Simplified model for portofolio analysis. *Management Science* .
- SKLAR, M. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, 229–231.